確率金利モデル入門勉強会　Stochastic Interest Rates 2章

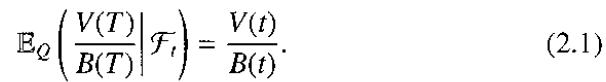
2021年1月13日

# Vanilla interest rate options and forward measure

　シンプルな金利オプションを考えるため，実測度からリスク中立測度，そしてフォワード測度への測度変換を考えていく．

**仮定2.1：リスク中立測度**

実確率空間をとすると，マネーマーケットアカウントで割り引かれたある証券の価格が確率測度のもとでマルチンゲールとなるようなと同値な確率測度が存在する．この時の確率測度を**リスク中立測度**ないし**マルチンゲール測度**と呼ぶ．



## Change of numeraire

**フォワード測度を考える理由**

リスク中立測度の下での，FRAの価格は

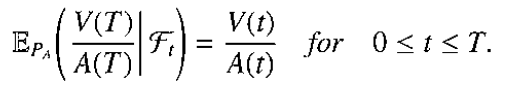
* 金利が確定的：の期待値のみを考えればよい（BSフレームワーク）
* 金利が確率的：との同時分布を考える必要がある

⇒ 適切なニューメレールへの変換の必要性

有名な方法としてはゼロクーポン債であり，**フォワード測度**と呼ばれる

**命題2.2**

ニューメレールをとすると，がのもとでマルチンゲールとなるような，確率測度と同値なが存在し，下記式を満たす．

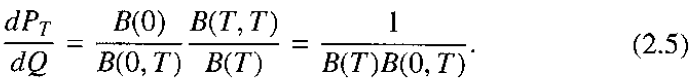


**証明概略**

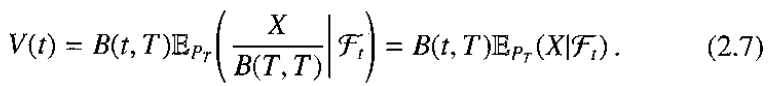
ニューメレールは取引可能であることからがマルチンゲールとなり，ラドンニコディム微分を定義．に対して，条件付き期待値のベイズ定理を適用する．

## Forward measure

・ラドンニコディム微分



年満期のゼロクーポン債をニューメレールとした，満期におけるペイオフがの資産価格は，下記となり，の下でのの確率分布がわかればよい．

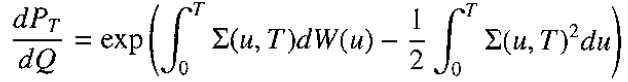


ここで，ゼロクーポン債が下記の確率過程に従うと仮定する．



**命題2.3**

ゼロクーポン債が(2.8)式に従うとき，



## Forward Contract

フォワード契約は時点において，時点で原資産をで購入する契約であり，時点での価格が0となる契約．



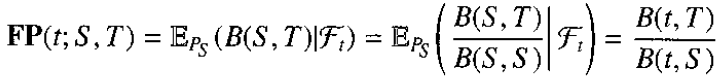
フォワード価格は可測であるので，上記式を書き換えると，



## Martingales under the forward measure

* フォワード債券価格：のもとでマルチンゲール

(2.10)式よりフォワード債券価格は下記式（命題2.2でニューメレールS-bondを考えた例）



* フォワードレート：のもとでマルチンゲール



## FRAs and interest rate swaps: the forward measure

マルチンゲールの性質(2.11)式を使用してFRAと金利スワップの価格式を再導出する．

* フォワード測度下におけるFRA契約の価格評価式

FRA契約の満期におけるペイオフがであり，時点の価値は0より

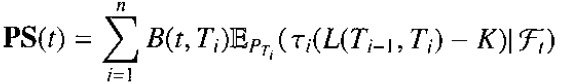


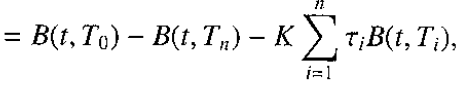
(2.11)式およびが可測であることから下記式となり，となる．



* フォワード測度下における金利スワップの価格評価式

ペイヤーズスワップは固定支払いと変動受け)流列の交換であるので





Ex2.4

伊藤の公式より，とおくと

より，両辺を積分して，